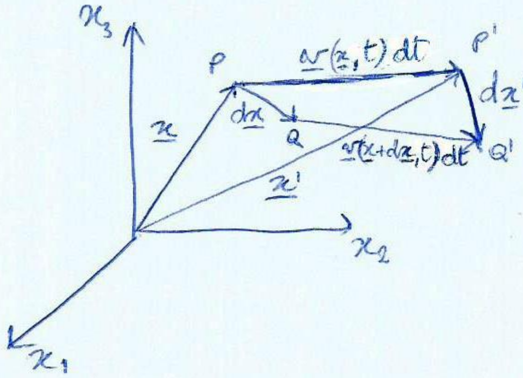
Decomposizione del campo di moto (analisi locale del moto)

La risposta del fluido alle sollecitazioni dipende dall'elemento locale. Per questo effettuiamo un'analisi locale del moto considerando un punto P individuato dal vettore $\underline{x}$. Il vettore $d\underline{x}$ uscente da P individua il punto Q:



Dopo un intervallo dt il punto P finisce in P' e Q in Q'. In altre parole l'elemento $d\underline{x}$ trasla, ruota e si allunga (o si accorcia).
Ciò accade con velocità:

$$\frac{d(d\underline{x})}{dt} = \frac{d\underline{x}' - d\underline{x}}{dt} = \frac{\cancel{\underline{x}} + \cancel{d\underline{x}} + \underline{v}(\underline{x}+d\underline{x},t)\,dt}{dt} + $$

$$- \frac{\cancel{\underline{x}} + \underline{v}(\underline{x},t)\cdot dt + \cancel{d\underline{x}}}{dt} =$$

$$= \underline{v}(\underline{x}+d\underline{x},t) - \underline{v}(\underline{x},t)$$

Sviluppiamo in serie di Taylor trascurando i termini con ordine superiore al primo:

$$\underline{v}(\underline{x}+d\underline{x},t) = \underline{v}(\underline{x},t) + \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_3}dx_3 = \underline{v}(\underline{x},t) + \nabla^T \underline{v}(\underline{x},t)\cdot d\underline{x}$$

In componenti:

$$v_i(\underline{x}+d\underline{x},t) = v_i(\underline{x},t) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx_j \Rightarrow v_i(\underline{x}+d\underline{x},t) - v_i(\underline{x},t) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx_j$$

Sostituendo nell'espressione di $\frac{d(d\underline{x})}{dt}$:

$$\frac{d(dx_i)}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\cdot dx_j$$

Le tre componenti della velocità vanno analizzate lungo le tre direzioni cartesiane. Nasce un tensore a nove componenti che, come lecito per qualsiasi tensore, viene decomposto in una parte simmetrica e in una antisimmetrica:

$$\frac{d(d\underline{x})}{dt} = (\nabla \underline{v})^T \cdot d\underline{x}$$

$$\nabla \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$(\nabla \underline{v})^T_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{D_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{\Omega_{ij}}$$

$\mathbb{D} = \{D_{ij}\}$ è il tensore velocità di deformazione (velocità con cui il fluido si deforma);
$\underline{\Omega} = \{\Omega_{ij}\}$ è il tensore velocità di rotazione (velocità con cui il fluido ruota)

Nella forma vettoriale e indiciale scriviamo:

$$\underline{v}(\underline{x}+d\underline{x},t) = \underline{v}(\underline{x},t) + \mathbb{D}\cdot d\underline{x} + \underline{\Omega}\,d\underline{x} \qquad v_i(x_i+dx_i,t) = v_i(x_i,t) + D_{ij}\,dx_j + \Omega_{ij}\,dx_j$$

Nell'intorno di P le particelle sono soggette a traslazione con velocità $\underline{v}(\underline{x},t)$ di P e a un moto legato alla velocità di variazione degli elementi lineari uscenti da P stesso.

Il tensore velocità di deformazione

Consideriamo un generico elemento $d\underline{x}$ di lunghezza dS tale che:

$$dS^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_k \cdot dx_k$$

Quindi $dS = (dx_k \cdot dx_k)^{1/2}$. Deriviamo:

$$\frac{d(dS^2)}{dt} = \frac{d(dx_k \cdot dx_k)}{dt} = 2\, dx_m \cdot \frac{d(dx_m)}{dt} \Rightarrow \frac{d(dS^2)}{dt} = 2\, dx_m \cdot \frac{\partial v_m}{\partial x_j} \cdot dx_j$$

$$\Rightarrow \frac{d(dS^2)}{dt} = \cancel{2}\, dx_m \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_m}\right) \cdot dx_j = dx_m \cdot \left(\frac{\partial v_m}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_m}\right) \cdot dx_j$$

$$\Rightarrow \frac{d(dS^2)}{dt} = dx_m\, D_{mj} \cdot dx_j$$

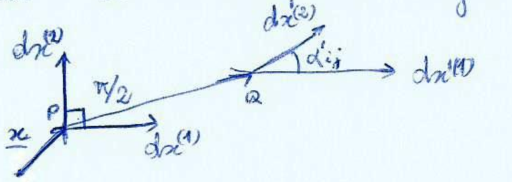
Il moto è localmente e istantaneamente rigido se $D_{mj} = 0$, ovvero se $\mathbb{D} = \mathbb{0}$.
Essendo un tensore simmetrico devono essere nulle le sei componenti distinte (le tre al di sopra della diagonale sono uguali alle tre sotto).
Supponiamo che l'elemento $d\underline{x}$ sia parallelo all'asse x_k, cioè possieda solo componente $dx_k^{(k)}$, mentre sono nulle le componenti nelle altre direzioni:

$$\frac{d(dx_k^{(k)})}{dt} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \cdot dx_j = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \cdot dx_k = D_{kk} \cdot dx_k$$

Possiamo definire velocità di dilatazione lineare relativa la quantità seguente:

$$\dot{\Delta}_k = \frac{1}{|d\underline{x}^{(k)}|} \cdot \frac{d|d\underline{x}^{(k)}|}{dt} = D_{kk}$$

Le componenti lungo la diagonale del tensore $\mathbb{D}$ sono associate a tale velocità.
Tra gli elementi materiali cambia pure la direzione relativa; esiste quindi una velocità di dilatazione angolare:



In generale: $\dot{\gamma} = \frac{\alpha' - \alpha}{dt}$

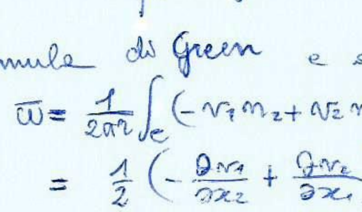
Riferendosi invece alla coppia di indici (i, j) distinti:

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\alpha'_{ij} - \pi/2}{dt}$$

Si può dimostrare che $\dot{\gamma}_{ij} = -2D_{ij}$, con $i \neq j$. I termini fuori della diagonale rappresentano quindi la velocità di dilatazione angolare.

Il tensore velocità di rotazione

Circonferenza centrata in P (nei calcoli si è posto $i = 1$ e $j = 2$):



$\underline{n} = (n_1, n_2)$ $\quad \underline{\tau} = (\tau_1, \tau_2) = (n_2, n_1)$ $\quad v_t = \underline{v} \cdot \underline{\tau} = v_2 n_1 - v_1 n_2$

Media della velocità angolare v_t/r sulla circonferenza:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2\pi r} \int_C \frac{v_t}{r} \cdot dC = \frac{1}{2\pi r^2} \int_C (-v_1 n_2 + v_2 n_1)\, dC$$

Passiamo a un integrale di superficie utilizzando la formula di Green e applichiamo poi il teorema della media:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2\pi r} \int_C (-v_1 n_2 + v_2 n_1)\, dC = \frac{1}{2\pi r^2} \int_S \left(-\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) dS = \frac{1}{2\cancel{\pi r^2}} \left(-\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) \cancel{\pi r^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) = -\Omega_{12}$$

Si ottiene una componente del tensore Ω, che è quindi una misura della media della velocità di rotazione.